بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

حد، پیوستگی، مشتق و کاربرد مشتق

سمیه جنگجوی شالدهی
شهریور ۱۳۹۹

فهرست مطالب

فصل ۱

حد و پیوستگی

۱-۱ مقدمه

گاهی لازم است رفتار تابعی را در نزدیکی نقطه‌ای بررسی کنیم تا معلوم شود که وقتی متغیر مستقل به آن نقطه نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به عدد ثابتی نزدیک می‌شوند یا خیر. ابتدا با یک مثال مفهوم شهودی حد را توضیح می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x)=2x-3$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی x به عدد 2 نزدیک می‌شود بررسی کنیم.

به این منظور، جدولی از مقادیر f را به ازای xهایی که به اندازه کافی به 2 نزدیک باشند، تشکیل می‌دهیم.

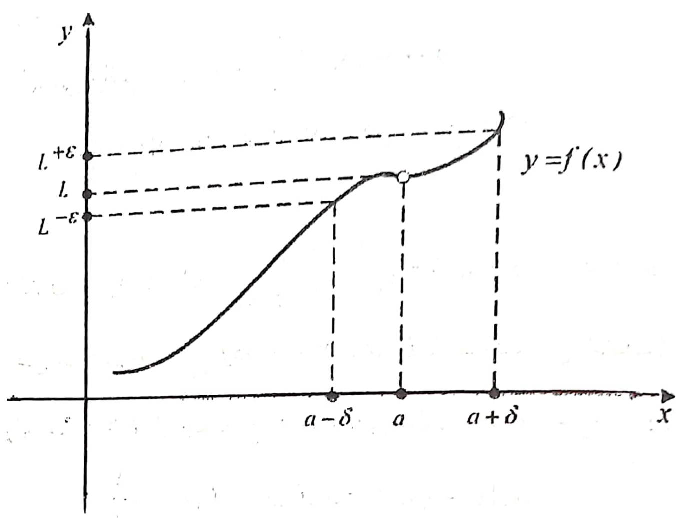
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.8	0.98	0.998	1	1.002	1.02	1.2

جدول بالا نشان می‌دهد که هر قدر x به عدد 2 نزدیک‌تر شود، مقدار $f(x)$ به عدد 1 نزدیک‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را تا هر اندازه‌ای بخواهیم به عدد 1 نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه کافی نزدیک به عدد 2 نه الزاما برابر با 2 انتخاب کنیم. به بیان ریاضی، $|f(x)-1|$ را می‌توانیم به دلخواه کوچک کنیم مشروط بر اینکه $|x-2|$ را به اندازه کافی کوچک انتخاب کنیم.

تعریف ۱-۱-۲. عدد L را حد تابع f در نقطه a می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ (معمولا وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon.$$

در این صورت، می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند برابر L است.



شکل ۱-۱:

بنا بر شکل ۱-۱، اگر حد تابع f وقتی x به a میل می‌کند برابر L باشد، آنگاه وقتی x در محور افقی بین $a-\delta$ و $a+\delta$ واقع باشد، $f(x)$ بر محور قائم بین $L-\varepsilon$ و $L+\varepsilon$ قرار خواهد داشت.

مثال ۱-۱-۳. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim_{x\to 2}(4x)=8$.

حل: بنا بر تعریف، باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$0<|x-2|<\delta \Rightarrow |4x-8|<\varepsilon.$$

فرض میکنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد، داریم

$$|4x-8|=|4(x-2)|=4|x-2|.$$

بنابراین اگر $4|x-2|<\varepsilon$، آنگاه $|4x-8|<\varepsilon$. اما از نامساوی $4|x-2|<\varepsilon$ نتیجه می‌شود $|x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$. پس می‌توانیم δ را برابر $\frac{\varepsilon}{4}$ اختیار کنیم. زیرا داریم

$$0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 0<4|x-2|=|4x-8|<\varepsilon.$$

توجه کنید که مقدار δ منحصر به فرد نیست، بلکه هر عدد مثبت کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{4}$ را نیز می‌توان انتخاب کرد. برای مثال، می‌توانیم δ را برابر $\frac{\varepsilon}{5}$ اختیار کنیم. زیرا

$$0<|x-2|<\frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow |4x-8|=4|x-2|<5|x-2|<\varepsilon.$$

مثال ۱-۱-۴. نشان بدهید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1 & x\geq 0, \\ 3x-1 & x<0. \end{cases}$$

در $x=0$ حد ندارد.

حل: فرض می‌کنیم حد تابع f در $x=0$ برابر L باشد (فرض خلف). پس بنا بر تعریف حد، براي هر $\varepsilon>0$، از جمله $\varepsilon=\frac{1}{2}$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$0<|x-0|<\delta \Rightarrow 0<|f(x)-L|<\varepsilon=\frac{1}{2}. \tag{۱-۱}$$

اما $0<|x|<\delta$ معادل با $x\neq 0$ و $-\delta<x<\delta$ است. اکنون اگر $-\delta<x<0$، آنگاه $f(x)=3x-1$ و در نتیجه بنا بر (۱-۱) داریم

$$|f(x)-L|=|3x-1-L|<\frac{1}{2}, \tag{۱-۲}$$

و اگر $0<x<\delta$، آنگاه $f(x)=3x+1$ و در نتیجه بنا بر (۱-۱) داریم

$$|f(x)-L|=|3x+1-L|<\frac{1}{2}. \tag{۱-۳}$$

از روابط (۱-۱)، (۱-۳) و (۱-۴) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} 2=|1+1| &= |1+1+(3x+L)-(3x-L)| \\ &= |(3x+1-L)+(-3x+1+L)| \\ &= |3x+1-L|+|-3x+1+L| \\ &= |3x+1-L|+|3x-1-L| \\ &< \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل است و f در $x=0$ حد ندارد.

قضیه ۱-۱-۵. *اگر تابع f در $x=a$ دارای حد باشد، آنگاه این حد منحصر به فرد است.*

۱-۲ قضایایی درباره حد تابع

محاسبه مقدار حد تابع با استفاده از تعریف حد و به کمک ε و δ، غالباً طولانی و پیچیده است. در این بخش قضایایی را درباره حد بیان می‌کنیم و با روش‌های محاسبه حد توابع آشنا می‌شویم. از اثبات این قضیه‌ها صرف نظر کرده‌ایم.

قضیه ۱-۲-۱. *فرض می‌کنیم حد توابع f و g در $x=a$ وجود داشته باشند. در این صورت،*

الف) اگر c عدد ثابتی باشد، آنگاه $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)$.

ب) اگر r عدد حقیقی مثبتی باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}[f(x)]^r=[\lim_{x\to a} f(x)]^r$.

پ) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$.

ت) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))$.

ث) اگر $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$، آنگاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.

ج) اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$، در این رابطه اگر n زوج باشد، $\lim_{x\to a} f(x)$ باید مثبت باشد.

چ) $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a} f(x)|$.

مثال ۱-۲-۲. اگر m، n و a سه عدد دلخواه باشند، آنگاه $\lim_{x\to a}(mx+n)=ma+n$.

حل: بنا بر تعریف ، باید ثابت کنیم که برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |mx+n-(ma+n)|<\varepsilon.$$

فرض می‌کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. داریم

$$|mx + n - (ma + n)| = |m||x - a|$$

بنابراین اگر $|m||x - a| < \varepsilon$، آنگاه $|mx + n - (ma + n)| < \varepsilon$. اما از نامساوی $|m||x - a| < \varepsilon$ نتیجه می‌شود $|x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|}$. پس می‌توانیم δ را برابر با $\frac{\varepsilon}{|m|}$ اختیار کنیم. زیرا داریم

$$0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{|m|} \Rightarrow |mx + n - (ma + n)| < \varepsilon.$$

مثال ۱-۲-۳.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(5x^3 - 3x + 2) &= \lim_{x\to 1} 5x^3 - \lim_{x\to 1} 3x + \lim_{x\to 1} 2 \\
&= 5(\lim_{x\to 1} x)^3 - 3(\lim_{x\to 1} x) + \lim_{x\to 1} 2 \\
&= 5(1)^3 - 3(1) + 2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-x^4 + 2x^2 + 1}{3x^2 + 5} &= \frac{\lim_{x\to 0} -x^4 + 2x^2 + 1}{\lim_{x\to 0} 3x^2 + 5} \\
&= \frac{-(0)^4 + 2(0)^2 + 1}{3(0)^2 + 5} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

از قضیه‌ی ۱-۲-۱ و مثال ۱-۲-۲، نتیجه زیر به دست می‌آید که در محاسبه‌ی حدها مفید است.

نتیجه ۱-۲-۴. *الف) اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای از x و a عددی حقیقی باشد، آنگاه*

$$\lim_{x\to a} p(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = p(a).$$

ب) اگر $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ تابعی گویا باشد که در آن $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای و a عددی حقیقی است به طوری که $q(a) \neq 0$، آنگاه

$$\lim_{x\to a} r(x) = r(a).$$

در برخی موارد، قبل از اینکه بتوانیم قضیه‌های حد را به کار ببریم، لازم است که ضابطه تعریف تابع داده شده را ساده کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱-۲-۵. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$، ب) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.

الف) تابع $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ در $x = 3$ تعریف نشده است. این امر مشکلی به وجود نمی‌آورد. زیرا حد این تابع وقتي x به 3 میل می‌کند، تنها به مقادیر x در نزدیکی 3 بستگی دارد و مقدار $x = 3$ را شامل نمی‌شود. به

ازای $x \neq 3$ داریم

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3.$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+3)=3+3=6.$$

ب) چون به ازای $x=0$ مخرج کسر به صفر میل می‌کند، نمی‌توانیم قضیه را مستقیماً به کار ببریم، ولی با استفاده از یک فن جبری می‌توانیم این حد را قابل محاسبه کنیم. به این منظور، صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم. داریم

$$\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}.\frac{(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}.$$

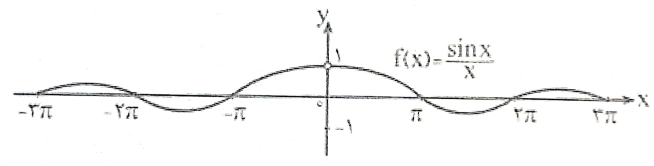
بنابراین،

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+9}-3x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{1}{6}.$$

قضیه ۱-۲-۶. *اگر به ازای هر x در بازه‌ی باز شامل a، توابع f، g و h در نامساوی‌های $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ صدق کنند و اگر $\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$، آنگاه تابع f در a دارای حد است و داریم* $\lim_{x\to a}f(x)=L$.

مثال ۱-۲-۷. تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ در $x=0$ تعریف نشده است .در جدول زیر برخی مقادیر تابع در همسایگی صفر داده شده است.

x	±1	±0.5	±0.1	±0.01	±0.001	$\to$	0
$f(x)$	0.84147098	0.95885108	0.99833417	0.99998333	0.99999983	$\to$	1



شکل ۱-۲:

با توجه به جدول و نمودار این تابع که در شکل ۱-۲ رسم شده است، ملاحظه می‌کنیم که وقتی متغیر x به عدد صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود ،مقادیر $f(x)$ به عدد 1 نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. پس:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

مثال ۱-۲-۸. حد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ را محاسبه کنید.

حل:داریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}.$$

توجه کنید که از $x \to 0$ نتیجه می‌شود $5x \to 0$. بنابراین اگر اختیار کنیم $\theta = 5x$، داریم

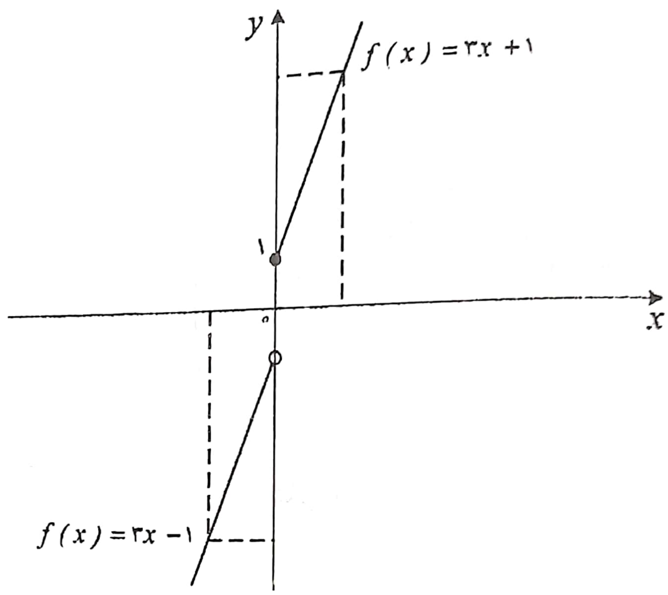
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = 5\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 5(1) = 5.$$

۱-۳ حدهای یکطرفه

تابع f با ضابطه تعریف زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \geq 0, \\ 3x-1 & x < 0. \end{cases} \qquad (۱-۴)$$

در مثال ۱-۱-۴ نشان دادیم که این تابع در $x = 0$ حد ندارد. نمودار f در شکل ۱-۳ رسم شده است.



شکل ۱-۳: نمودار تابع (۱-۴).

مثال ۱-۳-۱. چنان که در شکل دیده می‌شود وقتي که x از سمت راست به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ به عدد 1 نزدیک می‌شود، و هنگامی که x از سمت چپ (از طرف منفی) به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ به عدد -1 نزدیک می‌شود. در این صورت، گوییم حد راست تابع f در نقطه 0 برابر با 1 و حد چپ تابع f در نقطه 0 برابر با -1 است.

اکنون به تعریف حدهای راست و چپ یک تابع که حدهای یکطرفه نامیده می‌شوند می‌پردازیم.

تعریف ۱-۳-۲. فرض کنیم تابع f در بازه (a, c) تعریف شده باشد. اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

آنگاه عدد L را حد راست تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

تعریف ۱-۳-۳. فرض کنیم تابع f در بازه (b,a) تعریف شده باشد. اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

آنگاه عدد L را حد چپ تابع f در نقطه $x = a$ می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.

نکته ۱-۳-۴. *تمام قضایایی که در بخش ۱-۲ بیان کردیم برای حدهای یکطرفه همچنان برقرارند.*

مثال ۱-۳-۵. تابع f با ضابطه تعریف زیر را در نظر بگیرید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & x \geq 1, \\ 5x-2 & x < 1. \end{cases}$$

حد چپ و راست تابع f را در صورت وجود در $x = 1$ تعیین کنید.

برای محاسبه حد راست تابع f در $x = 1$، چون $x > 1$، داریم $f(x) = 3x + 2$. لذا

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x+2) = 3(1) + 2 = 5.$$

برای محاسبه حد چپ تابع f در $x = 1$، چون $x < 1$، داریم $f(x) = 5x - 2$. لذا

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (5x-2) = 5(1) - 2 = 3.$$

به طوری که ملاحظه می‌شود حد راست و چپ تابع f در $x = 1$ برابر نیستند.

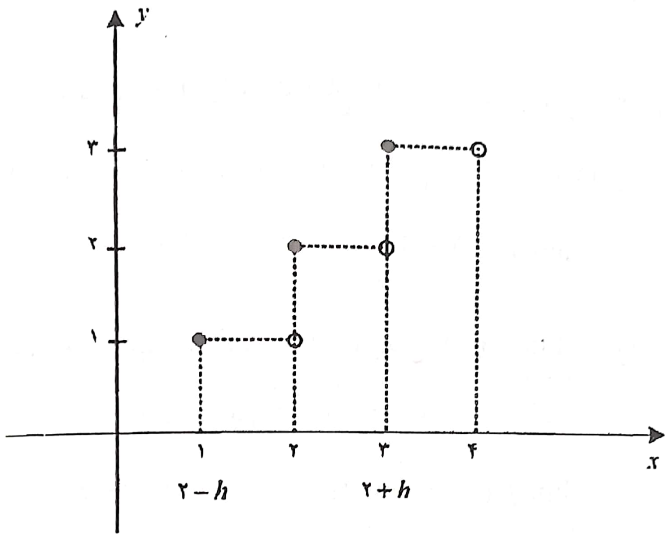
قضیه ۱-۳-۶. *حد تابع f در $x = a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد راست و حد چپ تابع f در $x = a$ وجود داشته و با هم برابر باشند.*

مثال ۱-۳-۷. تابع جزء صحیح $f(x) = [x]$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حدهای راست و چپ را در نقطه $x = 2$ تعیین کنیم.

مثال ۱-۳-۸. به طوری که در شکل ۱-۴ دیده می‌شود، تابع f هنگامی که x به سمت 2 میل می‌کند دارای حد نیست. زیرا وقتی که x برابر 2 یا کمی بزرگتر از 2 اختیار شود، داریم $[x] = 2$. اما هنگامی که x اندکی کوچکتر از 2، مثلا 1.999، باشد، داریم $[x] = 1$. به عبارت دیگر، اگر h عددی مثبت و کوچکتر از یک باشد، یعنی $0 < h < 1$، آنگاه به ازای هر x که $2 - h < x < 2$، داریم $[x] = 1$ و به ازای هر x که $2 < x < 2 + h$، داریم $[x] = 2$. در نتیجه، بنا بر تعریف حدود یکطرفه، حدهای راست و چپ f در $x = 2$ برابرند با

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} [x] = 1, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} [x] = 2.$$

چون حدهای راست و چپ تابع جزء صحیح در $x = 2$ برابر نیستند، این تابع بنا بر قضیه ۱-۳-۶، در $x = 2$ حد ندارد.



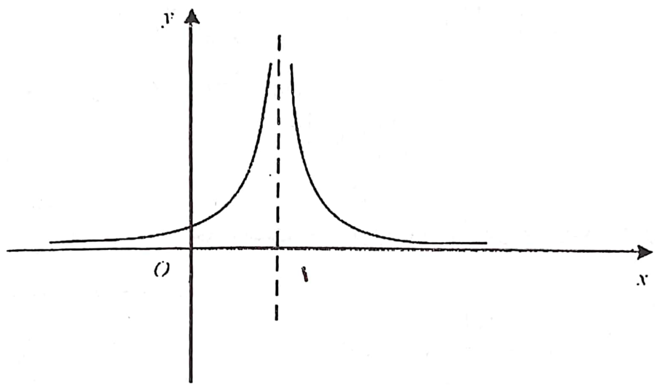
شکل ۱-۴: نمودار تابع $[x]$.

به همین ترتیب به ازای هر عدد صحیح n می‌توان نشان داد که تابع $f(x) = [x]$ در $x = n$ حد ندارد و داریم

$$\lim_{x\to n^-}[x] = n-1, \quad \lim_{x\to n^+}[x] = n.$$

۱-۴ حدهای بینهایت

مثال ۱-۴-۱. تابع $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع در شکل ۱-۵ رسم شده است.



شکل ۱-۵: نمودار تابع مثال ۱-۴-۱.

اکنون مقادیر $f(x)$ را هنگامی که x نزدیک به 1 باشد بررسی میکنیم. به جدول زیر توجه کنید.

x	1.1	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	100	10^4	10^6	10^8

به طوری که در جدول فوق می‌بینیم، هر قدر x از سمت راست به 1 نزدیک‌تر شود، مقدار $f(x)$ بزرگ‌تر می‌شود. به این ترتیب می‌توان $f(x)$ را بی اندازه بزرگ کرد، مشروط بر آنکه x به اندازه‌ی کافی از سمت راست

به 1 نزدیک‌تر شود. این خاصیت را با نماد زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

اکنون مقادیر $f(x)$ را هنگامی که x از سمت چپ به 1 نزدیک می‌شود بررسی می‌کنیم. به این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم

x	0	0.9	0.99	0.999	0.999
$f(x)$	1	100	10^4	10^6	10^8

این جدول نشان می‌دهد که هر قدر x از سمت چپ به 1 نزدیکتر میشود، مقدار $f(x)$ بزرگتر مي شود. این خاصیت را با نماد زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

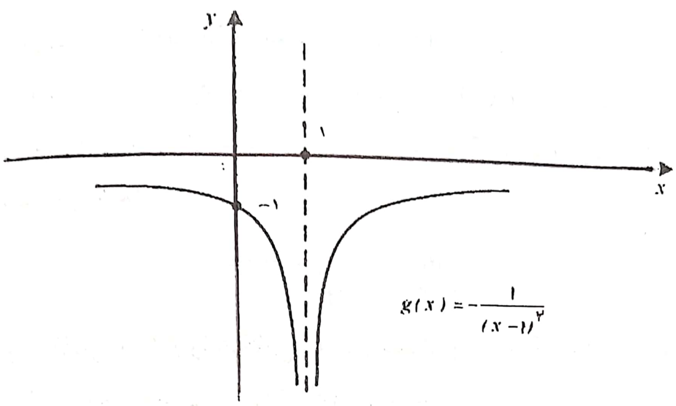
تعریف ۱-۴-۲. اگر برای هر عدد حقیقی مثبت M، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M,$$

آنگاه حد تابع f را هنگامی که x به سمت a میل می‌کند، مثبت بینهایت می‌نامیم و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

مثال ۱-۴-۳. با روشی مشابه مثال ۱-۴-۱ می‌توان رفتار تابع $g(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ را در نزدیکی نقطه 1 بررسی کرد. نمودار تابع در شکل ۱-۶ رسم شده است.



شکل ۱-۶: نمودار تابع مثال ۱-۴-۳.

مشاهده می‌کنیم هنگامی که x به عدد 1 نزدیک می‌شود، مقدار $g(x)$ بی اندازه کوچک می‌شود. این خاصیت را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty.$$

تعریف ۱-۴-۴. اگر برای هر عدد حقیقی مثبت M، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که
$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M,$$
آنگاه حد تابع f را هنگامی که x به سمت a میل می‌کند، منفی بینهایت می‌نامیم و می‌نویسیم
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

قضیه ۱-۴-۵. *اگر n عدد صحیح و مثبتی باید، داریم*

الف) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

ب)
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ +\infty & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

قضیه ۱-۴-۶. *وقتی* $x \to a$، $f(x) \to \infty$ *اگر وفقط اگر وقتی* $x \to a$، $\frac{1}{f(x)} \to 0$.

نکته ۱-۴-۷. *دستگاهی را که علاوه بر اعداد حقیقی، شامل دو نماد $+\infty$ و $-\infty$ است، دستگاه گسترده‌ی اعداد حقیقی می‌نامیم. در این دستگاه به ازای هر عدد حقیقی a قواعد زیر برقرار است.*

$$a + (+\infty) = +\infty,$$
$$a - (+\infty) = -\infty,$$
$$a.(+\infty) = \begin{cases} +\infty & a > 0, \\ -\infty & a < 0, \end{cases}$$
$$a.(-\infty) = \begin{cases} -\infty & a > 0, \\ +\infty & a < 0, \end{cases}$$
$$(+\infty).(+\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty).(+\infty) = -\infty,$$
$$(-\infty).(-\infty) = +\infty,$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

اما صورت‌هایی مانند $\frac{0}{0}$، $(\pm\infty) \times 0$، $(+\infty) + (-\infty)$ و $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ معین نیستند. زیرا برای این صورت‌ها یک مقدار منحصر به فرد وجود ندارد. هر یک از این صورت‌ها را یک صورت مبهم یا صورت نامعین می‌نامیم.

نکته ۱-۴-۸. *با در نظر گرفتن آنچه در ۱-۴-۷ گفته شد، تمام قضایایی که در بخش ۱-۲ درباره حد دیدیم، برای حدهای بینهایت نیز برقرارند.*

مثال ۱-۴-۹. حدهای راست و چپ تابع $f(x) = \frac{x}{x-2}$ را در $x = 2$ محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم $\lim_{x\to 2}(x-2) = 0$، داریم

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = (\lim_{x\to 2^+} x)(\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}).$$

از طرفی، هنگامی که x از سمت راست به 2 میل می‌کند، داریم $x - 2 > 0$. بنابراین، $(x-2)$ در حالی که همیشه مثبت است به سمت صفر میل می‌کند. لذا داریم

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = (\lim_{x\to 2^+} x)(\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}) = 2(+\infty) = +\infty.$$

به همین ترتیب اگر x از سمت چپ به 2 میل کند، داریم $x - 2 < 0$. بنابراین، در حالی که $(x-2)$ همیشه منفی است به صفر میل می‌کند. درنتیجه داریم

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = (\lim_{x\to 2^-} x)(\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}) = 2(-\infty) = -\infty.$$

مثال ۱-۴-۱۰. حد $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 2^-} 4-x^2} = 0, \quad \lim_{x\to 2^-}(x-2) = 0.$$

چون حد صورت و مخرج هر دو صفرند، برای محاسبه حد کسر نمی‌توانیم حد صورت را بر حد مخرج تقسیم کنیم زیرا $\frac{0}{0}$ صورت نامعینی است. لذا اعمال جبری زیر را روی کسر انجام می‌دهیم تا راه را برای استفاده از قضایایی که در مورد محاسبه حد می‌دانیم هموار کرده باشیم.

چون $x \to 2^-$، پس $x < 2$ و درنتیجه $x^2 < 4$ یا $4 - x^2 > 0$ و داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} &= \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} . \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}} \\
&= \frac{(2-x)(2+x)}{-(2-x)\sqrt{4-x^2}} = \frac{-(2+x)}{\sqrt{4-x^2}}.
\end{aligned}$$

چون $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$ و $\sqrt{4-x^2}$ در حالی که همیشه مثبت است به سمت صفر میل می‌کند، داریم

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty.$$

در نتیجه، به دست می‌آوریم

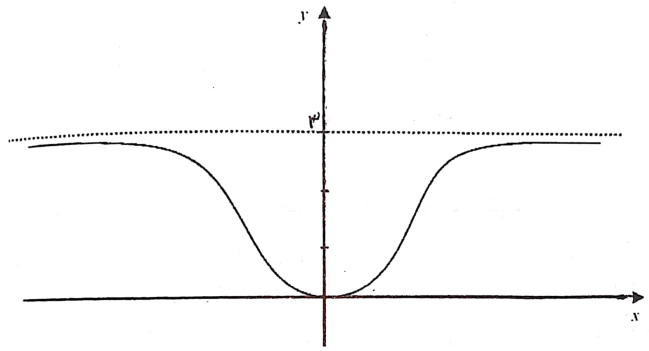
$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(2+x)}{\sqrt{4-x^2}} = (\lim_{x\to 2^-} -(2+x))(\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}) = -4(+\infty) = -\infty$$

۱-۵ حد در بینهایت

در این بخش به بررسی رفتار تابعی مانند f، هنگامی که x به اندازه کافی بزرگ شود، می‌پردازیم. وقتی می‌گوییم x مقادیر بزرگ را به دلخواه اختیار می‌کند، منظور این است که x از هر مقدار مثبت دلخواه مانند M بزرگتر باشد. در این صورت می نویسیم $x \to +\infty$.

هرگاه x هر مقدار دلخواه کوچکتر از هر عدد منفی مانند N را اختیار کند، می‌گوییم x به منفی بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to -\infty$.

مثال ۱-۵-۱. تابع $f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$ را در نظر می گیریم. نمودار این تابع در شکل ۱-۷ رسم شده است.



شکل ۱-۷: نمودار تابع مثال ۱-۵-۱.

مثال ۱-۵-۲. در جدول زیر مقادیر $f(x)$ برای بعضی مقادیر بزرگ x محاسبه شده است.

x	10	100	1000	10000
$f(x)$	$\frac{300}{101}$	$\frac{30000}{100001}$	$\frac{3000000}{1000001}$	$\frac{300000000}{100000001}$

به طوری که در جدول بالا می‌بینیم، به تدریج که مقادیر مثبت x بزرگ‌تر می‌شوند، مقادیر $f(x)$ به عدد 3 نزدیک‌تر می‌شوند. این خاصیت را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3.$$

در جدول زیر مقادیر $f(x)$ را بعضی مقادیر کوچک و منفی x محاسبه کرده‌ایم.

x	-10	-100	-1000	-10000
$f(x)$	$\frac{300}{101}$	$\frac{30000}{100001}$	$\frac{3000000}{1000001}$	$\frac{300000000}{100000001}$

توجه کنید که برای هد عدد حقیقی x داریم $f(-x) = f(x)$، یعنی f تابعی زوج است. بنابراین به تدریج که مقادیر منفی x کوچکتر می‌شوند، مقادیر f به عدد 3 نزدیکتر می‌شوند. این خاصیت را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3.$$

تعریف ۱-۵-۳. اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند M (معمولاً وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

آنگاه L را حد تابع f هنگامی که x به سمت مثبت بینهایت میل کند، می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

تعریف ۱-۵-۴. اگر برای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند N (معمولاً وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که

$$x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon,$$

آنگاه L را حد تابع f هنگامی که x به سمت منفی بینهایت میل کند، می‌نامیم و می‌نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

مثال ۱-۵-۵. اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه داریم

الف) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

ب) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

تعمیم مثال بالا به صورت زیر است.

قضیه ۱-۵-۶. *فرض می‌کنیم a عددی حقیقی یا یکی از نمادهای $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$، آنگاه $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$.*

نکته ۱-۵-۷. *تمام قضیه‌هایی که درباره حد در بخش ۱-۲ دیدیم در مورد حدهایی که در آنها $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ نیز صدق می‌کند.*

مثال ۱-۵-۸. حد $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{2x-1}$ را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبه حد داده شده، صورت و مخرج تابع کسری را بر بزرگترین توان x که در صورت و مخرج کسر وجود دارد تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+4}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{4}{x}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{3+4(0)}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

مثال ۱-۵-۹. حد $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{5x^3+x^2+4}$ را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبه حد داده شده، صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین توان x که در صورت و مخرج کسر وجود دارد، یعنی x^3، تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-1}{5x^3+x^2+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^3}} = \frac{3(0)+2(0)-0}{5+0+4(0)} = 0.$$

مثال ۱-۵-۱۰. حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x}{2x+1}$ را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبه حد داده شده، صورت و مخرج کسر را بر x^2 تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x}{2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{3}{x}}{\frac{x}{2}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5-3(0)}{2(0)+0}=+\infty.$$

نتایج حاصل از سه مثال اخیر را می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم.

قضیه ۱-۵-۱۱. *اگر f تابع گویایی با ضابطه تعریف*

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$$

باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\begin{cases}0 & n<m,\\ \pm\infty & n>m,\\ \frac{a_0}{b_0} & n=m.\end{cases} \tag{۱-۵}$$

برای اثبات کافی است صورت و مخرج $f(x)$ را در حالت‌های اول و سوم بر x^m و در حالت دوم بر x^n تقسیم کنیم.

مثال ۱-۵-۱۲. حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$ را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}$$

از $x\to+\infty$ نتیجه می‌شود $x>0$. یعنی، $\sqrt{x^2}=|x|=x$. بنابراین داریم

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2(1+\frac{3}{x^2})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}}=2.$$

مثال ۱-۵-۱۳. حد $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+5}-x)$ را محاسبه کنید.

حل: در این مورد نمی‌توانیم حد مجموع دو تابع را به کار ببریم، زیرا در این صورت عبارت نامعین $\infty-\infty$ حاصل می‌شود. برای رفع این مشکل صورت و مخرج $\frac{\sqrt{x^2+2x+5}-x}{1}$ را در مزدوج صورت یعنی $\sqrt{x^2+2x+5}+x$ ضرب می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x+5}-x &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+5}-x)(\sqrt{x^2+2x+5}+x)}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+5-x^2}{\sqrt{x^2+2x+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}+x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(2+\frac{5}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}.\end{aligned}$$

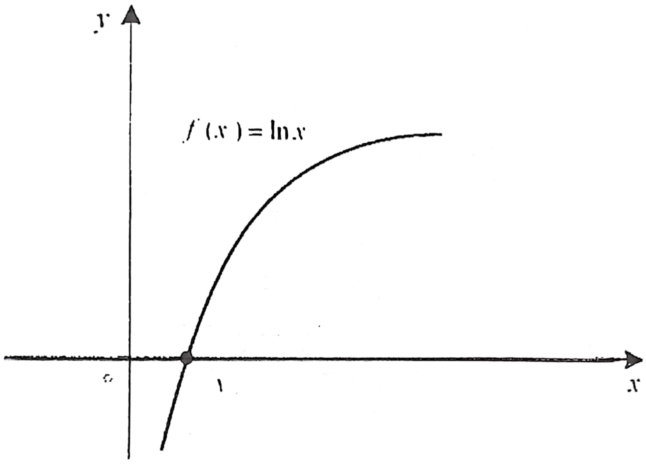
چون $x \to +\infty$، پس $x > 0$ و $\sqrt{x^2} = |x| = x$. بنابراین،

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x(2+\frac{5}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1)} = 1.$$

حد تابع لگاریتمی. با توجه به نمودار تابع لگاریتم طبیعی $f(x) = Ln\,x$، حدهای زیر را داریم:

الف) $\lim_{x\to+\infty} Ln\,x = +\infty$،

ب) $\lim_{x\to 0^+} Ln\,x = -\infty$.

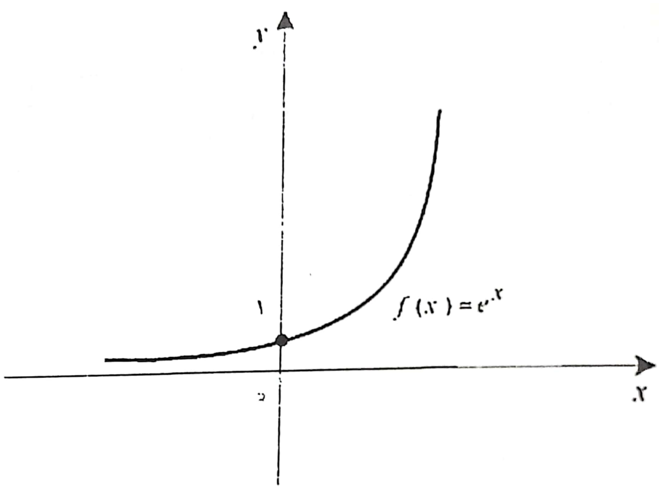


شکل ۱-۸:

حد تابع نمایی. با توجه به نمودار تابع نمایی $f(x) = e^x$، حدهای زیر را داریم:

الف) $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$،

ب) $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.



شکل ۱-۹:

۱-۶ پیوستگی تابع

تعریف ۱-۶-۱. تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌نامیم در صورتی که سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) f در a تعریف شده باشد، یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد.

ب) f در a حد داشته باشد.

ج) حد تابع f در $x=a$ برابر مقدار تابع در این نقطه باشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

هرگاه یکی از شرایط بالا در $x=a$ برقرار نباشد، f را در $x=a$ ناپیوسته می‌نامیم. اگر f در a پیوسته نباشد، a را یک نقطه ناپیوستگی f می‌نامیم.

مثال ۱-۶-۲. تابع $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ در $x=2$ ناپیوسته است، زیرا تابع f در 2 تعریف نشده است. اما این تابع در $x=2$ دارای حد است و داریم

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

مثال ۱-۶-۳. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & x\geq 1\\ 4x-2 & x<1\end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

حل: چون $f(1)=-1$، شرط (الف) تعریف ۱-۶-۱ برقرار است. اما از طرفی داریم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x-3)=-1,\quad \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(4x-2)=2.$$

چون حدهای چپ و راست تابع f در $x=1$ برابر نیستند، حد تابع f در $x=1$ وجود ندارد. بنابراین شرط (ب) تعریف پیوستگی برقرار نیست. درنتیجه تابع f در $x=1$ پیوسته نیست.

مثال ۱-۶-۴. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>0\\ 2 & x=0\\ 3x+1 & x<0\end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.

حل: چون $f(0)=2$، شرط (الف) تعریف ۱-۶-۱ برقرار است. اما از طرفی داریم

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(3x+1)=1.$$

پس $\lim_{x\to 0} f(x)=1$؛ یعنی شرط (ب) تعریف ۱-۶-۱ نیز برقرار است. اما $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$. پس شرط (ج) تعریف پیوستگی برقرار نیست. درنتیجه تابع f در $x=0$ پیوسته نیست.

تعریف ۱-۶-۵. الف) می‌گوییم تابع f در $x=a$ پیوستگی راست دارد، هرگاه f در a تعریف شده باشد و $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

الف) می‌گوییم تابع f در $x=a$ پیوستگی چپ دارد، هرگاه f در a تعریف شده باشد و $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

مثال ۱-۶-۶. تابع مثال ۱-۶-۳ در $x=1$ پیوستگی راست دارد و تابع مثال ۱-۶-۴ در $x=0$ نه پیوستگی راست دارد نه پیوستگی چپ.

نکته ۱-۶-۷. *با توجه به آنچه در تعریف حد دیدیم، با استفاده از نمادهای ε و δ می‌توان پیوستگی یک تابع را در یک نقطه تعریف کرد:*

تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌نامیم اگر برای هر $\varepsilon>0$، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

قضیه ۱-۶-۸. *هرگاه توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه*

الف) تابع $f\pm g$ در $x=a$ پیوسته است.

الف) تابع $kf(x)$ در $x=a$ پیوسته است (k عددی ثابت است).

الف) تابع $f\times g$ در $x=a$ پیوسته است.

الف) اگر $g(a)\neq 0$، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ پیوسته است.

نکته ۱-۶-۹. *هر تابع چندجمله‌ای در هر عدد حقیقی حد دارد و این حد برابر با مقدار چندجمله‌ای در آن نقطه است. بنابراین، هر تابع چندجمله‌ای در هر عدد حقیقی پیوسته است.*

همچنین، بنا بر نتیجه ۱-۲-۴، هر تابع گویای $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ در همه دامنه‌اش پیوسته است، زیرا به ازای هر $a\in\mathbb{R}$ که $q(a)\neq 0$ داریم

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}=f(a).$$

قضیه ۱-۶-۱۰. *اگر تابع f در $x=b$ پیوسته باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=g(b)$، آنگاه*

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=f(b),$$

به بیان دیگر،

$$\lim_{x\to a}(f\circ g)(x)=f(\lim_{x\to a} g(x)).$$

قضیه ۱-۶-۱۱. *اگر تابع g در a و تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه تابع مرکب $f\circ g$ در a پیوسته خواهد بود.*

مثال ۱-۶-۱۲. نشان دهید تابع $h(x)=(2x^3+3x+5)^{10}$ در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

حل: فرض می‌کنیم $f(x)=x^{10}$ و $g(x)=2x^3+3x+5$. داریم

$$(f\circ g)(x)=f(2x^3+3x+5)=(2x^3+3x+5)^{10}=h(x).$$

دو تابع f و g در هر نقطه دامنه خود، یعنی روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته‌اند. بنابراین، طبق قضیه ۱-۶-۱۱، تابع h روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

از قضیه ۱-۶-۱۱ نتیجه می‌شود:

نتیجه ۱-۶-۱۳. *اگر تابع f در a پیوسته باشد، آنگاه تابع $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ به ازای هر عدد صحیح و مثبت n در a پیوسته خواهد بود. برای مقادیر زوج n، باید داشته باشیم $f(a) > 0$.*

تعریف ۱-۶-۱۴. تابع f را در بازه (a, b) پیوسته گوییم، هرگاه f در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

مثال ۱-۶-۱۵. تابع $f(x) = \frac{5x^3-1}{(x-1)(x+3)}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در هر عدد حقیقی به استثنای 1 و -3 پیوسته است و درنتیجه، بنا بر تعریف ۱-۶-۱۴، در هر بازه بازی که شامل 1 و -3 نباشد، پیوسته خواهد بود.

تعریف ۱-۶-۱۶. تابع f را در بازه $[a, b]$ پیوسته گوییم، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

الف) f در بازه (a, b) پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد.

ج) f در b پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال ۱-۶-۱۷. پیوستگی تابع با ضابطه تعریف زیر را در بازه $[-2, 2]$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & -2 \leq x < 1, \\ x+4 & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

حل: چون $f(1) = 5$ و

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (3x+2) = 5, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x+4) = 5.$$

پس $\lim_{x\to 1} f(x) = 5 = f(1)$، یعنی f در $x = 1$ پیوسته است. بنابراین، f در بازه $(-2, 2)$ پیوسته است. از طرفی داریم

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = \lim_{x\to (-2)^+} (3x+2) = -4, \quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+4) = 6.$$

درنتیجه، بنا بر تعریف ۱-۶-۱۶، f در بازه $[-2, 2]$ پیوسته است.

فصل ۲
مشتق

در فصل قبل با مفهوم حد آشنا شدیم. در این فصل با استفاده از این مفهوم اساسی، به تعریف مفهوم مهم مشتق می‌پردازیم. مشتق یک ابزار ریاضی برای اندازه‌گیری تغییرات متغیرها نسبت به هم است. با مطالعه مشتق می‌توانیم آهنگ تغییراتی را که در مسائل مختلف پیش می‌آید تعیین کنیم. علاوه بر این، به کمک مشتق می‌توانیم ماکسیمم و مینیم توابع را نیز بررسی کنیم.

۲-۱ مفهوم مشتق

مثال ۲-۱-۱. وزن کودک با گذشت زمان تغییر می‌کند. پس می‌توانیم آن را به عنوان تابعی از زمان در نظر بگیریم. اگر این تابع را $w(t)$ بنامیم، آنگاه تغییر وزن کودک در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با $w(t_2) - w(t_1)$.

آهنگ متوسط تغییر وزن کودک در این بازه زمانی، از تقسیم تغییر وزن او بر طول این بازه زمانی به دست می‌آید. بنابراین، آهنگ متوسط تغییر $w(t)$ در بازه زمانی $[t_1, t_2]$ برابر است با $\frac{w(t_2)-w(t_1)}{t_2-t_1}$.

تعریف ۲-۱-۲. فرض می‌کنیم تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد. برای هر دو عدد x_0 و x_1 در بازه (a, b) که $a < x_0 < x_1 < b$، تغییر مقدار $f(x)$ هنگامی که x از x_0 تا x_1 تغییر کند برابر $f(x_1) - f(x_0)$ است و آهنگ متوسط تغییر f در بازه $[x_0, x_1]$ برابر $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ است.

اکنون با استفاده از آهنگ متوسط تغییر یک تابع به تعریف مشتق تابع در یک نقطه می‌پردازیم.

تعریف ۲-۱-۳. تابع $y = f(x)$ و نقطه a در دامنه f را در نظر می‌گیریم. اگر

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{۲-۱}$$

وجود داشته باشد، آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم و با $f'(a)$ نشان می‌دهیم.

اگر تابع f در نقطه a مشتق داشته باشد، f را در a مشتق‌پذیر می‌گوییم.

مثال ۲-۱-۴. مشتق تابع ثابت $f(x) = c$ که در آن c عدد حقیقی ثابتی است، در هر عدد حقیقی برابر صفر است.

حل: فرض کنیم $a \in \mathbb{R}$. در این صورت، داریم

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

مثال ۲-۱-۵. مشتق تابع $f(x) = 3x^2 - 4x$ را در $x = 2$ با استفاده از تعریف به دست آورید.

حل: داریم

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(3x^2 - 4x) - (12 - 8)}{x - 2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(3x+2)(x-2)}{x - 2} = 8. \end{aligned}$$

قضیه ۲-۱-۶. *تابع $f(x)=x^r$ که در آن r عددی حقیقی است، روی دامنه‌ی تابع مشتق‌پذیر است و داریم* $.f'(x)=rx^{r-1}$

مثال ۲-۱-۷. مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را به دست آورید.

حل: چون $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$، قضیه‌ی ۲-۱-۶ را به ازای $r=\frac{1}{2}$ به کار می‌بریم. برای هر $x>0$ داریم

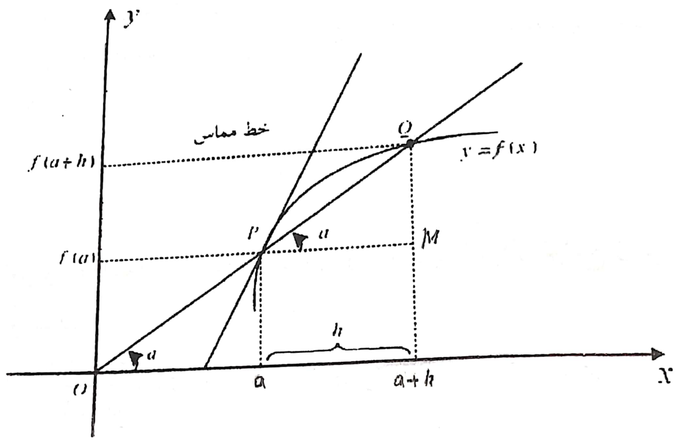
$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

نکته ۲-۱-۸. *اگر در تعریف قرار بدهیم $h=x-a$، به دست می‌آوریم $x=a+h$. از طرفی $x\to a$ اگر و تنها اگر $h\to 0$. درنتیجه (۲-۱) را می‌توان به صورت*

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \tag{۲-۲}$$

نوشت. بنابراین، مشتق تابع در را می‌توان از رابطه (۲-۲) نیز به دست آورد.

تعبیر هندسی مشتق. مفهوم مشتق یک تابع در یک نقطه را می‌توان به شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه تعبیر کرد. برای روشن شدن مطلب، تابع $y=f(x)$ و دو نقطه $P(a,f(a))$ و $Q(a+h,f(a+h))$ را روی نمودار در نظر می‌گیریم. به شکل ۲-۱ توجه کنید.



شکل ۲-۱:

در مثلث قائم‌الزاویه PMQ داریم

$$\tan\alpha=\frac{QM}{PM}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

می‌دانیم $\tan\alpha$ شیب خط قائم PQ است. اکنون فرض می‌کنیم تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، بنا بر تعریف ۲-۱-۳،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وجود دارد. بنابراین هنگامی که h به صفر نزدیک شود، نقطه P ثابت می‌ماند و نقطه Q روی نمودار تابع به سوی P حرکت می‌کند و خط PQ امتدادش را چنان تغییر می‌دهد که شیب آن به مقدار $f'(a)$ به عنوان حد نزدیک می‌شود. پس منطقی است که شیب نمودار تابع در نقطه P برابر با $f'(a)$ تعریف شود.

نتیجه ۲-۱-۹. *الف) شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه $x = a$ که آن را با $m(a)$ نشان می‌دهیم برابر است با مشتق تابع f در این نقطه، به عبارت دیگر، $m(a) = f'(a)$.*

ب) خط عمود بر نمودار تابع f در نقطه $x = a$ خطی است که بر خط مماس بر نمودار در این نقطه عمود است. پس اگر $m'(a)$ شیب خط عمود بر نمودار در این نقطه باشد، داریم $m'(a) = -\frac{1}{m(a)}$.

تعریف ۲-۱-۱۰. بنا بر تعریف، مشتق تابع f در نقطه x برابر است با

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x}.$$

در این رابطه h را که ممکن است مثبت یا منفی باشد نمو متغیر مستقل می‌نامیم و آن را با نماد Δx نشان می‌دهیم. تفاضل $f(x+h) - f(x)$ را نمو تابع f به ازای h می‌نامیم و با نماد Δy یا Δf نشان می‌دهیم. بنابراین می‌نویسیم

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

مشتق تابع $y = f(x)$ را با نمادهای دیگری نیز نشان می‌دهند، مانند y'، $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{df}{dx}$.

قضیه زیر رابطه مشتق‌پذیری یک تابع و پیوستگی آن را در یک نقطه بیان می‌کند.

قضیه ۲-۱-۱۱. *اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است.*

نکته ۲-۱-۱۲. *توجه کنید که عکس قضیه درست نیست. یعنی ممکن است تابعی در نقطه‌ای پیوسته باشد، ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. برای مثال تابع $f(x) = |x|$ را در نظر می‌گیریم. از $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ نتیجه می‌شود که تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است. اما این تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نیست، زیرا داریم*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

تعریف ۲-۱-۱۳. مشتق‌های راست و چپ تابع $y = f(x)$ در $x = a$ را به ترتیب با نمادهای $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

مشروط بر اینکه این حدها وجود داشته باشند. مشتق‌های راست و چپ را مشتق‌های یکطرفه می‌نامیم.

قضیه ۲-۱-۱۴. *$f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و مساوی باشند.*

مثال ۲-۱-۱۵. نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} 3+1 & x \geq 1 \\ 2x^2+2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

حل: داریم

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (3x+1) = 4, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2+2) = 4.$$

از $\lim_{x\to 1} f(x) = 4 = f(1)$ نتیجه می‌شود که f در $x = 1$ پیوسته است. اکنون مشتق‌های راست و چپ f را در $x = 1$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3(1+h)+1-4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{3h}{3} = 3, \\ f'_-(1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2(1+h)^2+2-4}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h^2+4h}{1} = 4. \end{aligned}$$

مشتق‌های راست و چپ f در $x = 1$ مساوی نیستند. پس بنا بر قضیه ۲-۱-۱۴ تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

تعریف ۲-۱-۱۶. تابع f را در بازه بسته $[a, b]$ مشتق‌پذیر می‌نامیم اگر

الف) f در بازه باز (a, b) مشتق‌پذیر باشد.

ب) مشتق‌های یکطرفه $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ وجود داشته باشند.

۲-۲ قضایای مشتق

قضیه ۲-۲-۱. *اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند، آنگاه*

الف) مجموع $f(x) + g(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g(x)'.$$

ب) تفاضل $f(x) - g(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g(x)'.$$

ج) برای هر عدد حقیقی k، تابع $kf(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

د) حاصل‌ضرب $f(x)g(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ه) *خارج‌قسمت $\frac{f(x)}{g(x)}$ مشتق‌پذیر است و داریم*

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

و) *برای هر عدد طبیعی n، تابع $f^n(x)$ مشتق‌پذیر است و داریم*

$$(f^n(x))' = nf^{n-1}(x)f'(x)$$

مثال ۲-۲-۲. طبق قضیه‌ی ۲-۱-۶ و ۲-۲-۱، تابع چند جمله‌ای

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

در تمام اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است و داریم

$$p'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

قضیه ۲-۲-۳. *(قاعده زنجیری) اگر توابع $y = f(u)$ و $u = g(x)$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه تابع مرکب $y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$ مشتق‌پذیر است و داریم*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}.$$

مثال ۲-۲-۴. فرض کنید $f(u) = 2u^4 - 3u^2 + 7$ و $u = 2x^3 - x + 5$. مشتق تابع f را نسبت به x به دست آورید.

حل: بنا بر قاعده زنجیری داریم

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}.$$

از طرفی

$$\frac{df}{du} = 8u^3 - 6u = 8(2x^3 - x + 5)^3 - 6(2x^3 - x + 5), \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 - 1.$$

در نتیجه به دست می‌آوریم

$$\frac{df}{dx} = (8(2x^3 - x + 5)^3 - 6(2x^3 - x + 5))(6x^2 - 1).$$

۲-۳ مشتق‌گیری ضمنی

همه توابع به طور صریح به صورت $y = f(x)$ بیان نمی‌شوند، مثلا معادله

$$F(x,y) = x^7 - 3x^4y^6 + 5y^3x - 4e^{2x}y = 0 \qquad (۲-۳)$$

را نمی‌توان برحسب y یا برحسب x حل کرد. با این حال ممکن است یک یا چند تابع مانند f وجود داشته باشد به طوری که اگر $y = f(x)$، معادله (۲-۳) برقرار باشد؛ یعنی معادله

$$x^7 - 3x^4(f(x))^6 + 5(f(x))^3x - 4e^{2x}(f(x)) = 0$$

به ازای جمیع مقادیر x در دامنه f درست باشد. در این حالت تابع f با معادله

$$F(x, y) = 0 \tag{۲-۴}$$

به طور ضمنی تعریف شده است. اگر حل معادله (۲-۴) نیاز نباشد و بخواهیم مشتق y نسبت به x را بیابیم، از دستور

$$y' = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$$

استفاده می‌کنیم که در آن F_x مشتق تابع F نسبت به x با فرض ثابت بودن y، و F_y مشتق تابع F نسبت به y با فرض ثابت بودن x است. این روش محاسبه مشتق را مشتق‌گیری ضمنی می‌نامند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۳-۱. تابع $y = f(x)$ به طور ضمنی توسط معادله $F(x, y) = 2x^3 + xy^2 - 3 = 0$ بیان شده است. $f'(x)$ را محاسبه کنید.

حل: داریم

$$F_x = 6x^2 + y^2 + 0 = 6x^2 + y^2, \quad F_y = 0 + 2xy + 0 = 2xy.$$

بنابراین،

$$f'(x) = -\frac{6x^2 + y^2}{2xy}.$$

۲-۴ مشتق توابع مثلثاتی

مشتق تابع سینوس. فرض می‌کنیم $y = \sin x$، بنا بر تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= (\lim_{h\to 0} \cos(\frac{2x+h}{2}))(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}) = \cos x. \end{aligned}$$

نتیجه ۲-۴-۱. *فرض می‌کنیم $u = g(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد و $f(u) = \sin u$. با استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آوریم*

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(u)}{du}.\frac{du}{dx}.$$

یا

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du}.\frac{du}{dx} = \cos u.\frac{du}{dx}.$$

مثال ۲-۴-۲. فرض کنید $f(x) = \sin(5x^3 + 2x - 1)$. مشتق f را نسبت به x محاسبه کنید.

حل: قرار می‌دهیم $u = 5x^3 + 2x - 1$. بنا بر داریم

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(\sin u)}{du}.\frac{du}{dx} = \cos u.\frac{d(5x^3 + 2x - 1)}{dx} = \cos(5x^3 + 2x - 1).(15x^2 + 2).$$

مشتق تابع کسینوس. فرض می‌کنیم $y = \cos x$، بنا بر تعریف مشتق داریم

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(\frac{2x+h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h} \\ &= -(\lim_{h\to 0} \sin(\frac{2x+h}{2}))(\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}) = -\sin x. \end{aligned}$$

نتیجه ۲-۴-۳. *فرض می‌کنیم $u = g(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد و $f(u) = \cos u$. با استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آوریم*

$$\frac{d(\cos u)}{dx} = \frac{d(\cos u)}{du}.\frac{du}{dx} = -\sin u.\frac{du}{dx}.$$

مشتق تابع تانژانت. با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ می‌توان مشتق تابع تانژانت را به دست آورد

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x}) = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

نتیجه ۲-۴-۴. *فرض می‌کنیم $u = g(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد و $f(u) = \tan u$. با استفاده از قاعده زنجیری به دست می‌آوریم*

$$\frac{d(\tan u)}{dx} = (1 + \tan^2 u).\frac{du}{dx}.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -(1 + \cot^2 x) = -csc^2 x.$$

۲-۵ مشتق توابع وارون مثلثاتی

قضیه ۲-۵-۱. *فرض می‌کنیم f تابعی وارون‌پذیر و در x مشتق‌پذیر باشد به طوری که $f'(x) \neq 0$. اگر g وارون تابع f و در $y = f(x)$ پیوسته باشد، آنگاه g در y دارای مشتق است و داریم*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

می‌دانیم وارون تابع $x=\sin y$ که $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$، تابع $y=\sin^{-1}x$ است که در آن $x\in(-1,1)$. پس بنا بر قضیه ۲-۵-۱ داریم

$$y'=(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد

$$(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2},$$
$$(\cot^{-1}x)'=\frac{-1}{1+x^2}.$$

۲-۶ مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

قضیه ۲-۶-۱. *الف) مشتق تابع $f(x)=\ln x$ که $x>0$، برابر است با*

$$\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x}.$$

ب) اگر $u(x)>0$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dx}(\ln u(x))=\frac{1}{u}.\frac{du}{dx}.$$

مشتق تابع نمایی. تابع $x=\ln y$ که $y>0$ و تابع $y=e^x$ که $x\in\mathbb{R}$، وارون یکدیگرند. پس بنا بر ۲-۵-۱ داریم

$$y'=\frac{d}{dx}(e^x)=\frac{1}{(\ln y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x.$$

نتیجه ۲-۶-۲. *اگر $u(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد، آنگاه بنا بر قاعده زنجیری داریم*

$$\frac{d}{dx}(e^{u(x)})=e^{u(x)}.\frac{du(x)}{dx}.$$

مثال ۲-۶-۳. الف) اگر $y=\ln(3x^2+4x)$، آنگاه بنا بر ۲-۶-۱ (ب) داریم

$$y'=\frac{1}{3x^2+4x}(6x+4).$$

ب) اگر $y=e^{3+\tan x}$، آنگاه بنا بر نتیجه‌ی ۲-۶-۲،

$$y'=e^{3+\tan x}\frac{d}{dx}(3+\tan x)=e^{3+\tan x}(1+\tan^2 x).$$

مشتق تابع a^x. فرض می‌کنیم $y=a^x$ که $a>0$ و $a\neq 1$. برای محاسبه مشتق از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم. به این منظور، از دو طرف $y=a^x$ لگاریتم طبیعی می‌گیریم

$$\ln y=\ln a^x=x\ln a.$$

سپس از دو طرف رابطه اخیر نسبت به x مشتق می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$\frac{y'}{y}=\ln a,$$

یا

$$y'=y\ln a=a^x.\ln a.$$

نتیجه ۲-۶-۴. *از قاعده زنجیری نتیجه می‌شود که اگر $u(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x باشد، آنگاه*

$$\frac{d}{dx}(a^{u(x)})=a^{u(x)}\ln a.\frac{du(x)}{dx}.$$

مثال ۲-۶-۵. مشتق تابع $y=2^{3x^2+5x}$ بنا بر نتیجه‌ی ۲-۶-۴ برابر است با

$$y'=2^{3x^2+5x}.\ln 2\frac{d}{dx}(3x^2+5x)=2^{3x^2+5x}.(\ln 2)(6x+5).$$

مشتق تابع $\log_a v(x)$. در نتیجه ۲-۶-۴، اگر اختیار شود $u(x)=\log_a v(x)$ که در آن $v(x)$ تابع مشتق‌پذیری از x است، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx}(a^{\log_a v(x)})=a^{\log_a v(x)}\ln a.\frac{d\log_a v(x)}{dx}.$$

از طرفی با توجه به $a^{\log_a v(x)}=v(x)$، رابطه بالا به صورت

$$\frac{d}{dx}v(x)=v(x).\ln a.\frac{d\log_a v(x)}{dx},$$

به دست می‌آید، که از آن به دست می‌آوریم

$$\frac{d\log_a v(x)}{dx}=\frac{1}{v(x)}.\frac{1}{\ln a}.\frac{dv(x)}{dx}.$$

این رابطه را می‌توانیم به صورت زیر خلاصه کنیم

$$\frac{d\log_a v(x)}{dx}=\frac{v'(x)}{v(x)}.\frac{1}{\ln a}. \qquad (۲-۵)$$

مثال ۲-۶-۶. مشتق تابع $\log_2 x^3+5x^2+4$ بنا بر (۲-۵) برابراست با

$$y'=\frac{(x^3+5x^2+4)'}{x^3+5x^2+4}.\frac{1}{\ln 2}=\frac{3x^2+10x}{x^3+5x^2+4}.\frac{1}{\ln 2}.$$

۲-۷ مشتق مرتبه‌های بالاتر

تعریف ۲-۷-۱. فرض می‌کنیم تابع f در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیر باشد. $f'(a)$ را مشتق اول تابع f در نقطه‌ی $x=a$ می‌نامیم. فرض می‌کنیم $A=\{x|$وجود دارد$f'(x)\}$. در این صورت، f' تابعی روی A است و می‌توانیم درباره مشتق f' در نقطه‌ی $a\in A$ صحبت کنیم. مشتق f' در نقطه‌ی $x=a$ را مشتق دوم تابع f در نقطه‌ی $x=a$ می‌نامیم و با $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب، به ازای هر عدد طبیعی n، اگر مشتق اول تابع $f^{(n-1)}(x)$ وجود داشته باشد آن را مشتق nام تابع f می‌نامیم و با نماد $f^{(n)}(x)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲-۷-۲. مشتق دوم تابع $f(x) = (ax+b)e^x$ را به دست آورید.

حل: مشتق اول این تابع برابر است با

$$f'(x) = ae^x + (ax+b)e^x.$$

تابع f مشتق‌پذیر است، پس مشتق دوم آن عبارت است از

$$f''(x) = ae^x + ae^x + (ax+b)e^x.$$

فصل ۳

کاربرد مشتق

در این فصل کاربردهایی از مشتق را در تعیین بازه‌های صعودی و نزولی، نقاط ماکسیمم و مینیمم و تقعر و نقاط عطف نمودار تابع بیان می‌کنیم.

۳-۱ توابع صعودی و نزولی

تعریف ۳-۱-۱. اگر تابع f روی فاصله‌ای تعریف شده باشد، f را روی آن فاصله صعودی گوییم اگر و تنها اگر برای هر x_1 و x_2 در آن فاصله که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$.

تعریف ۳-۱-۲. اگر تابع f روی فاصله‌ای تعریف شده باشد، f را روی آن فاصله نزولی گوییم اگر و تنها اگر برای هر x_1 و x_2 در آن فاصله که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$.

از مشتق اول تابع می‌توان برای تعیین بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی یا نزولی است استفاده کرد. به قضیه زیر که بدون اثبات آمده است توجه کنید.

قضیه ۳-۱-۳. *فرض می‌کنیم تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد.*

الف) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$، آنگاه f روی فاصله $[a,b]$ صعودی است.

ب) اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$، آنگاه f روی فاصله $[a,b]$ نزولی است.

مثال ۳-۱-۴. تابع $f(x) = x^2 + 5$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. تعیین کنید روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

حل: چون $f'(x) = 6x$، روشن است که برای هر $x > 0$ داریم $f'(x) > 0$ و برای هر $x < 0$ داریم $f'(x) < 0$. پس f روی $\mathbb{R}^+$ صعودی و روی $\mathbb{R}^-$ نزولی است. توجه کنید که به ازای $x = 0$ داریم $f'(x) = 0$.

تعریف ۳-۱-۵. فرض می‌کنیم a عددی متعلق به دامنه تابع f باشد. a را نقطه بحرانی تابع f می‌نامیم اگر یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

الف) $f'(a) = 0$.

ب) $f'(a)$ وجود نداشته باشد.

مثال ۳-۱-۶. نقاط بحرانی توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = 2x^3 - 4$، ب) $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}} - 3$.

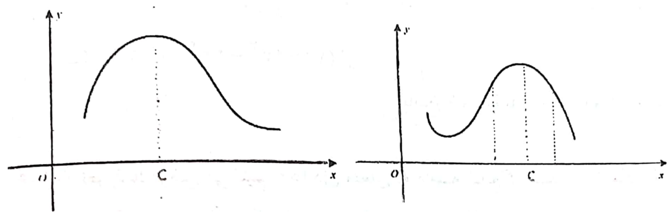
حل) الف) $a = 0$ یک نقطه بحرانی تابع f است زیرا $f'(a) = 0$.

ب) $a = 1$ یک نقطه بحرانی تابع f است زیرا $f'(1)$ وجود ندارد.

نتیجه ۳-۱-۷. *با توجه به قضیه ۳-۱-۳ و تعریف ۳-۱-۵، برای تعیین بازه‌هایی که تابع روی آنها صعودی یا نزولی است، ابتدا باید نقاط بحرانی تابع را به دست آورد و سپس علامت f' را تعیین کرد.*

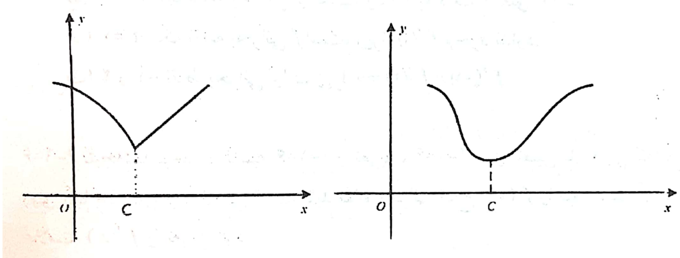
۳-۲ ماکسیمم و مینیمم تابع

تعریف ۳-۲-۱. می‌گوییم تابع f در c یک ماکسیمم نسبی یا یک ماکسیمم موضعی دارد، اگر برای هر x از بازه‌ی بازی که شامل x باشد داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$.



شکل ۳-۱: نمودار توابعی که در c ماکسیمم نسبی دارند.

تعریف ۳-۲-۲. می‌گوییم تابع f در c یک مینیمم نسبی یا یک مینیمم موضعی دارد، اگر برای هر x از بازه‌ی بازی که شامل x باشد داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$.



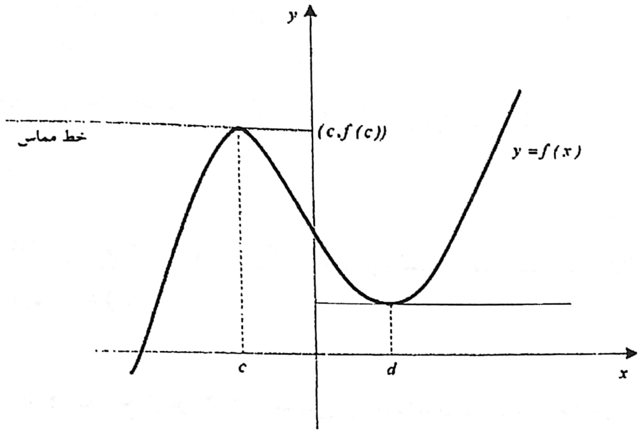
شکل ۳-۲: نمودار توابعی که در c مینیمم نسبی دارند.

تعریف ۳-۲-۳. اگر تابع f در $x = c$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد، گوییم f در این نقطه اکسترمم نسبی یا اکسترمم موضعی دارد. $f(c)$ را مقدار اکسترمم نسبی f در $x = c$ می‌نامیم.

قضیه زیر ارتباط نقاط اکسترمم و مشتق اول تابع را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۲-۴. *اگر تابع f در $x = c$ یک اکسترمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه داریم $f'(c) = 0$.*

تعبیر هندسی قضیه این است که اگر تابع f در $x = c$ مشتق‌پذیر باشد و در این نقطه دارای اکسترمم نسبی باشد، آنگاه مماس بر $y = f(x)$ در نقطه $(c, f(c))$ افقی است. به شکل ۳-۳ توجه کنید.



شکل ۳-۳:

نکته ۳-۲-۵. *عکس قضیه‌ی ۳-۲-۴ درست نیست، یعنی تابعی مانند f وجود دارد که به ازای مقادیری از x صفر است، ولی این تابع در این نقاط ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد. برای مثال فرض کنید $f(x) = (x-1)^3$. داریم*

$$f'(x) = 3(x-1)^2.$$

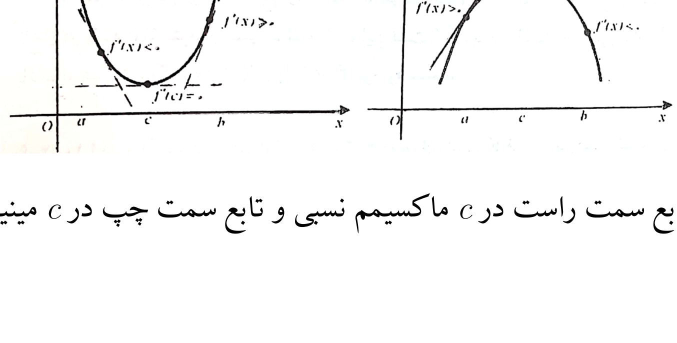
از معادله‌ی $f'(x) = 0$ نتیجه می‌شود $x = 1$. اما به ازای $x > 1$ داریم $f(x) > 0$ و به ازای $x < 1$ داریم $f(x) < 0$. درنتیجه f در $x = 1$ نه ماکسیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی.

قضیه ۳-۲-۶. (آزمون مشتق اول برای اکسترمم‌های نسبی). *فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی بازی از نقطه‌ی بحرانی c مانند (a, b) پیوسته باشد و در تمام نقاط آن جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.*

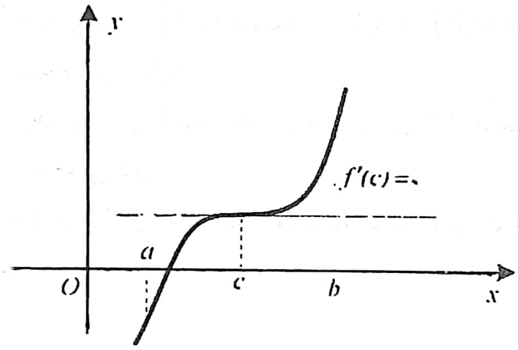
الف) اگر f' در بازه‌ی باز (a, c) مثبت و در بازه‌ی باز (c, b) منفی باشد، آنگاه f در c یک ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر f' در بازه‌ی باز (a, c) منفی و در بازه‌ی باز (c, b) مثبت باشد، آنگاه f در c یک مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر هیچ‌کدام از (الف) و (ب) برقرار نباشد، آنگاه f در c ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد.



شکل ۳-۴: تابع سمت راست در c ماکسیمم نسبی و تابع سمت چپ در c مینیمم نسبی دارد.



شکل ۳-۵: تابع f در c اکسترمم نسبی ندارد.

مثال ۳-۲-۷. با استفاده از آزمون مشتق اول، ماکسیمم و مینیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 12$ را به دست آورید.

حل: مشتق این تابع برابر است با

$$f'(x) = x^2 - 5x + 6.$$

ریشه‌های معادله عبارتند از $x = 2$ و $x = 3$. بنابراین، 2 و 3 نقاط بحرانی تابع f هستند. نقاط بحرانی تابع را در جدول قرار می‌دهیم آزمون مشتق اول را به کار می‌بریم.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	
$f(x)$		صعودی		نزولی		صعودی	

نتیجه می‌گیریم مقادیر ماکسیمم ومینیمم نسبی تابع f به ترتیب عبارتند از $f(2) = \frac{50}{3}$ و $f(3) = \frac{33}{2}$.

قضیه ۳-۲-۸. *(آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های نسبی). فرض میکنیم c یک نقطه بحرانی تابع f باشد و $f'(c) = 0$. همچنین، فرض می‌کنیم f' و f'' در بازه‌ی بازی شامل c وجود داشته باشند.*

الف) اگر $f''(c) < 0$، آنگاه f در c ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر $f''(c) > 0$، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

مثال ۳-۲-۹. فرض کنید $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$. با استفاده از آزمون مشتق دوم ماکسیمم ومینیمم تابع f را به دست آورید.

حل: مشتق اول تابع برابر است با

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

ریشه‌های معادله‌ی عبارتند از $x = 1$ و $x = 3$. بنابراین، 1 و 3 نقاط بحرانی تابع f هستند. مشتق دوم این تابع برابر است با

$$f''(x) = 6x - 12.$$

مقادیر تابع f'' در 1 و 3 عبارتند از

$$f''(1) = 6 - 12 < 0, \quad f''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0.$$

در نتیجه، بنا بر آزمون مشتق دوم این تابع در $x = 1$ ماکسیمم نسبی و در $x = 3$ مینیمم نسبی دارد. مقادیر ماکسیمم ومینیمم نسبی عبارتند از $f(1) = 7$ و $f(3) = 3$.

تعریف ۳-۲-۱۰. تابع f و اعداد c و d را در دامنه تابع در نظر میگیریم.

الف) $f(c)$ را ماکسیمم مطلق تابع f روی دامنه‌اش می‌نامیم، اگر برای هر x از دامنه تابع f داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$.

ب) $f(d)$ را مینیمم مطلق تابع f روی دامنه‌اش می‌نامیم، اگر برای هر x از دامنه تابع f داشته باشیم $f(d) \leq f(x)$.

ماکسیمم مطلق یا مینیمم مطلق تابع را اکسترمم مطلق تابع نیز می‌گوییم.

قضیه ۳-۲-۱۱. *اگر تابع f در بازه‌ی بسته $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f روی این بازه دارای ماکسیمم و مینیمم مطلق است.*

برای تعیین ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع f روی بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$، ابتدا اکسترمم‌های نسبی آن را در (a, b) می‌یابیم. فرض کنیم این اکسترمم‌ها $f(x_1)$، $f(x_2)$، $\cdots$و $f(x_n)$ باشند که در آنها $x_1, x_2, \cdots, x_n$ نقاطی از (a, b) هستند. در این صورت، ماکسیمم اعداد

$$f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), f(b)$$

ماکسیمم مطلق تابع f در $[a, b]$، و مینیمم این اعداد مینیمم مطلق f در $[a, b]$ خواهد بود.

مثال ۳-۲-۱۲. ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ را در بازه‌ی $[0, 3]$ به دست آورید.

حل: مشتق تابع برابر است با

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

ریشه‌های معادله‌ی $f'(x) = 0$ عبارتند از $x = 1$ و $x = 2$. بنابراین، 1 و 2 نقاط بحرانی تابع f هستند. اکنون آزمون مشتق اول را به کار می‌بریم و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	0		1		2		3
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		صعودی		نزولی		صعودی	

در جدول دیده می‌شود که f در $x = 1$ ماکسیمم نسبی و در $x = 2$ مینیمم نسبی دارد. مقادیر این ماکسیمم و مینیمم نسبی به ترتیب برابرند با $f(1) = 5$و $f(2) = 4$. مقادیر تابع در نقاط 0 و 3 برابرند با $f(0) = 0$ و $f(3) = 9$. درنتیجه، $f(0) = 0$ مینیمم مطلق و $f(3) = 9$ ماکسیمم مطلق تابع f است.

مثال ۳-۲-۱۳. می‌خواهیم باغچه‌ای به شکل مستطیل بسازیم که محیط آن با نرده‌ای به طول 80 متر محصور شود. طول و عرض این باغچه را باید چطور انتخاب کنیم تا مساحت باغچه ماکسیمم شود.

حل: فرض می‌کنیم طول و عرض این مستطیل به ترتیب x و y باشد. اگر A مساحت باغچه باشد، آنگاه

$$A = xy. \tag{۳-۱}$$

مجموع طول نرده‌های چهار طرف باغچه 80 متر است، پس

$$2x + 2y = 80 \Rightarrow x + y = 40. \tag{۳-۲}$$

y را از معادله‌ی ۳-۲ به دست می‌آوریم و در معادله‌ی ۳-۱ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت

$$A = x(40 - x) = 40x - x^2.$$

اکنون مساحت باغچه تنها به یک متغیر وابسته است و بنابراین برای تعیین ماکسیمم A، باید A' را به دست آوریم.

$$A' = 40 - 2x.$$

از $A' = 0$ نتیجه می‌شود $x = 20$، پس 20 یک نقطه‌ی بحرانی A است. از طرفی داریم $A'' = -2$. با توجه به نامساوی $A''(20) = -2 < 0$ نتیجه می‌گیریم که A در 20 یک ماکسیمم نسبی دارد. بنابراین اگر ابعاد باغچه برابر با $x = 20$ و $y = 40 - 20 = 20$ متر انتخاب شوند، مساحت آن ماکسیمم می‌شود. مقدار این ماکسیمم مساوی است با $A = (20)(20) = 400$.

۳-۳ تقعر، تحدب و نقطه عطف نمودار تابع

تعریف ۳-۳-۱. نمودار تابع $y = f(x)$ را در نقطه‌ی $(a, f(a))$ به بالا مقعر است هرگاه

الف) $f'(a)$ موجود باشد.

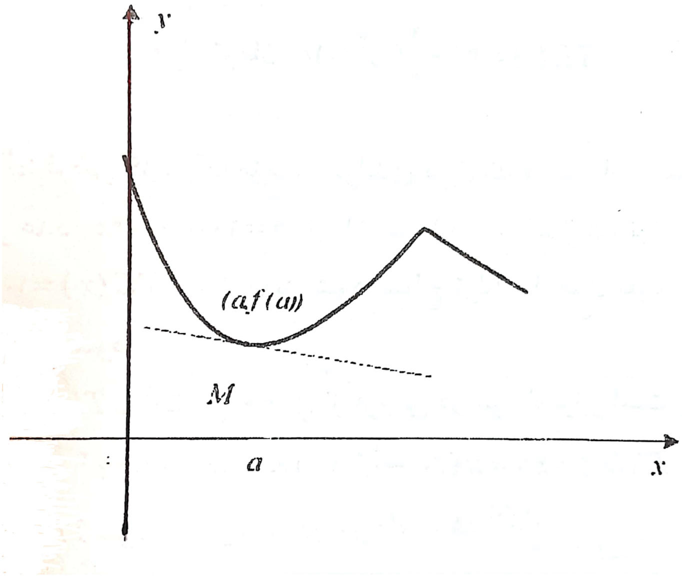
ب) نمودار تابع f در بازه‌ی بازی شامل $x = a$ در بالای خط مماس برنمودار در این نقطه قرار گیرد. شکل ۳-۶ بخشی از نمودار یک تابع را که در نقطه‌ی M به بالا مقعر است نشان می‌دهد.

اگر نمودار تابع f در هر نقطه‌ی بازه‌ی I به بالا مقعر باشد، گوییم نمودار f روی بازه‌ی I به بالا مقعر است.

تعریف ۳-۳-۲. نمودار تابع $y = f(x)$ را در نقطه‌ی $(a, f(a))$ به پایین مقعر است هرگاه

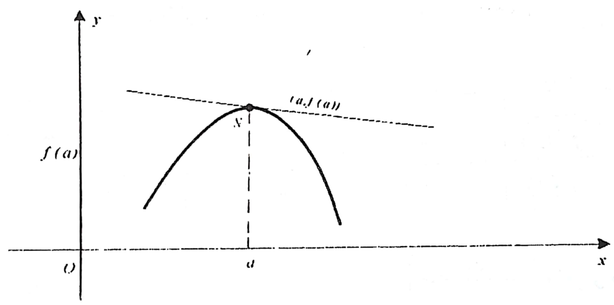
الف) $f'(a)$ موجود باشد.

ب) نمودار تابع f در بازه‌ی بازی شامل $x = a$ در پایین خط مماس برنمودار در این نقطه قرار گیرد. شکل ۳-۷ بخشی از نمودار یک تابع را که در نقطه‌ی M به پایین مقعر است نشان می‌دهد.



شکل ۳-۶: نمودار تابع f در نقطه‌ی M به بالا مقعر است .

اگر نمودار تابع f در هر نقطه‌ی بازه‌ی I به پایین مقعر باشد، گوییم نمودار f روی بازه‌ی I به پایین مقعر است.



شکل ۳-۷: نمودار تابع f در نقطه‌ی M به پایین مقعر است.

قضیه زیر آزمونی برای تعیین تقعر و تحدب منحنی به دست می‌دهد.

قضیه ۳-۳-۳. *فرض کنیم تابع f روی بازه‌ی بازی شامل $x = c$ دارای مشتق‌های اول و دوم باشد.*

الف) اگر $f''(c) > 0$، آنگاه نمودار f در نقطه $(c, f(c))$ به بالا مقعر است.

ب) اگر $f''(c) < 0$، آنگاه نمودار در نقطه $(c, f(c))$ به پایین مقعر است.

مثال ۳-۳-۴. تعیین کنید نمودار تابع $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$ در چه بازه‌ای به بالا و در چه بازه‌ای به پایین مقعر است.

حل: مشتق‌های اول و دوم تابع برابر است با

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x, \quad f''(x) = 12x^2 - 12x + 2.$$

ریشه‌های $f''(x)=0$ عبارتند از $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ و $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$		$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		تقعر به بالا		تقعر به پایین		تقعر به بالا	

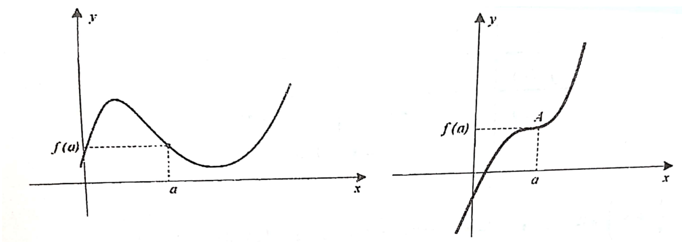
بنابراین، نمودار f در بازه‌های $(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{6})$ و $(\frac{3+\sqrt{3}}{6}, +\infty)$ به بالا مقعر و در بازه‌ی $(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6})$ به پایین مقعر است.

تعریف ۳-۳-۵. نقطه‌ی $(a, f(a))$ را نقطه‌ی عطف نمودار تابع f می‌نامیم اگر نمودار تابع در این نقطه دارای خط مماس باشد و بازه‌ی بازی شامل a وجود داشته باشد به گونه‌ای که به ازای هر x از این بازه، یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) اگر $x > a$، آنگاه $f''(x) > 0$ و اگر $x < a$، آنگاه $f''(x) < 0$.

ب) اگر $x > a$، آنگاه $f''(x) < 0$ و اگر $x < a$، آنگاه $f''(x) > 0$.

شکل‌های ۳-۸ بخشی از نمودار تابعی را نشان می‌دهند که A یک نقطه‌ی عطف آن است.



شکل ۳-۸: نقطه‌ی A یک نقطه‌ی عطف نمودار تابع f است.

مثال ۳-۳-۶. در مثال ۳-۳-۴، تابع f دارای دو نقطه‌ی عطف به طول‌های $x = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ و $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ است.

مثال ۳-۳-۷. نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = 2x^4 - 3x + 5$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: مشتق‌های اول و دوم f برابرند با

$$f'(x) = 8x^3 - 3, \quad f''(x) = 24x^2.$$

ریشه‌ی معادله‌ی $f''(x) = 0$ عبارت است از $x = 0$. از آنجایی که $f''(x)$ در هیچ نقطه‌ای تغییر علامت نداده است، نمودار این تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

قضیه ۳-۳-۸. *فرض کنیم تابع f در بازه‌ی بازی شامل a مشتق‌پذیر و $(a, f(a))$ نقطه عطف نمودار تابع باشد. اگر $f''(a)$ موجود باشد، آنگاه $f''(a) = 0$.*